Всероссийская олимпиада школьников по математике
2019–2020 уч. г.
Школьный этап

10 класс

Задача 1. Двое рабочих за два часа вырыли траншею. При этом первый рабочий устал и начал работать втрое медленней, а второй рабочий раззадорился и начал работать втрое быстрее, так что на прокладку второй такой траншеи у них ушёл один час. Во сколько раз производительность второго превосходила производительность первого изначально?

Ответ: в $\frac{5}{3}$ раза.

Решение. Пусть изначально производительность первого рабочего была равна x, а производительность второго рабочего была равна y. Заметим, что при прокладке второй траншеи суммарная производительность рабочих была вдвое выше изначальной, поэтому

$$2(x+y) = \frac{1}{3}x + 3y;$$

$$y = \frac{5}{3}x.$$

Значит, производительность второго была в $\frac{5}{3}$ раза выше производительности первого. □

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

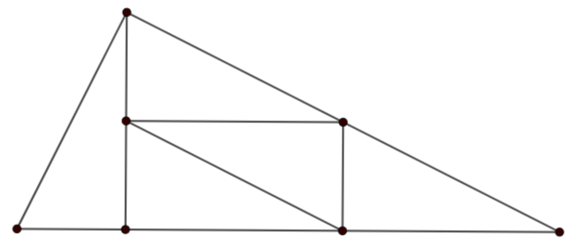
2 б. Составлено верное уравнение, эквивалентное уравнению из решения задачи, но дальнейших продвижений нет, или допущена арифметическая ошибка.

1 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике один катет в два раза больше другого. Разрежьте его на 5 равных треугольников.

Решение. Проведём высоту из вершины треугольника к его гипотенузе. В большем из двух получившихся треугольников проведём все средние линии. Нетрудно понять, что получившееся разбиение удовлетворяет условию задачи: все треугольники прямоугольные и подобны исходному, а их гипотенузы равны меньшему катету исходного.



□

Критерии

4 б. Приведён любой, удовлетворяющий условию задачи, пример.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 3. Над девятизначным числом разрешается производить следующее действие: любую цифру числа можно заменить на последнюю цифру суммы цифр этого числа. Можно ли с помощью таких действий из числа 133355555 получить число 123456789?

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Сумма девяти нечётных цифр — нечётное число, и его последняя цифра тоже будет нечётной. Поэтому чётные цифры в таком процессе появиться не могут. □

Критерии

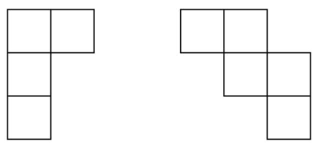
4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

1 б. Присутствует идея рассмотрения чётности суммы цифр, но дальнейших продвижений нет.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 4. Квадрат 6×6 разрезали на четырёхклеточные и пятиклеточные фигуры, равные показанным на рисунке (обе фигуры участвуют в разрезании). Сколько каких фигур было использовано?

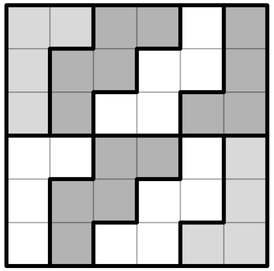


Ответ: 4 четырёхклеточные и 4 пятиклеточные фигуры.

Решение. Пусть всего четырёхклеточных фигур x, а пятиклеточных y. Посчитаем общее количество клеточек — получается $4x + 5y = 36$. Запишем это выражение немного иначе: $5y = 36 - 4x = 4(9 - x)$.

Так как x и y — целые числа, мы можем сделать вывод, что $y \vdots 4$. Но y явно меньше 8 (иначе бы пятиклеточные фигуры занимали хотя бы 40 клеточек). Таким образом, $x = y = 4$.

Ниже изображен один из способов разрезания квадрата.



□

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

4 б. Доказано, что должно быть 4 четырёхклеточных и 4 пятиклеточных фигуры, но не приведён пример разбиения.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

1 б. Приведён пример разбиения на 4 четырёхклеточных и 4 пятиклеточных фигуры, но не доказано, что другое количество фигур невозможно.

0 б. Приведён верный ответ, но отсутствует обоснование.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

Задача 5. Внутри квадрата $ABCD$ отмечены точки K и M (точка M находится внутри треугольника ABD, точка K — внутри BMC) так, что треугольники BAM и DKM равны ($AM = KM$, $BM = MD$, $AB = KD$). Найдите $\angle KCM$, если $\angle AMB = 100°$.

Ответ: $35°$.

Решение. Заметим, что треугольники ABM и AMD также равны по трём сторонам. Таким образом, точка M лежит на диагонали AC квадрата, то есть $\angle MCD = \angle MAD = \angle MAB = 45°$ (рис. 1).

Кроме этого, из равенства треугольников BAM и DKM следует, что $\angle MKD = \angle BAM = 45°$. Получается, что четырёхугольник $MKCD$ — вписанный. Тогда $\angle KCM = \angle KDM = 180° - 100° - 45° = 35°$. □

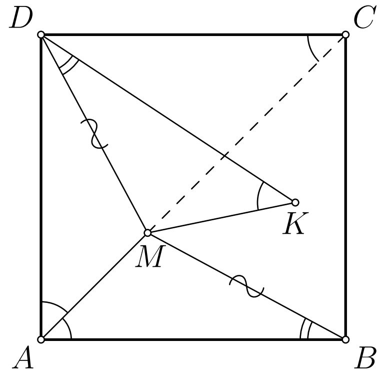


Рис. 1: к решению задачи 5

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

0 б. Задача не решена или решена неверно.

В остальных случаях суммировать следующие критерии:

3 б. Доказана вписанность четырёхугольника $MKCD$.

1 б. Доказано, что точка M лежит на диагонали AC.

0 б. Приведён верный ответ.

Задача 6. Даны квадратные трёхчлены $x^2 + ax + b$, $x^2 + cx + d$ и $x^2 + ex + f$. Оказалось, что любые два из них имеют общий корень, но все три общего корня не имеют. Докажите, что выполнены ровно два неравенства из следующих трёх:

$$\frac{a^2 + c^2 - e^2}{4} > b + d - f.$$

$$\frac{c^2 + e^2 - a^2}{4} > d + f - b,$$

$$\frac{e^2 + a^2 - c^2}{4} > f + b - d.$$

Решение. Пусть корни первого квадратного трёхчлена равны x_1, x_2; второго — x_1, x_3; а третьего — x_2, x_3. Тогда (по теореме Виета) мы можем сказать, что

$$a = -(x_1 + x_2); \quad c = -(x_1 + x_3); \quad e = -(x_2 + x_3);$$

$$b = x_1x_2; \quad d = x_1x_3; \quad f = x_2x_3.$$

Рассмотрим следующее выражение

$$\frac{a^2 + c^2 - e^2}{4} - (b + d - f) =$$

$$= \frac{(x_1+x_2)^2+(x_1+x_3)^2-(x_2+x_3)^2}{4} - (x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3) =$$

$$= \frac{x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3}{2} = \frac{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}{2}.$$

Аналогично

$$\frac{c^2+e^2-a^2}{4} - (d+f-b) = \frac{(x_3-x_2)(x_3-x_1)}{2};$$

$$\frac{e^2+a^2-c^2}{4} - (f+b-d) = \frac{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}{2}.$$

Пусть, без ограничения общности, $x_1 > x_2 > x_3$, тогда первое и второе выражение больше нуля, а третье — меньше нуля. Что и требовалось доказать. □

Критерии

4 б. Приведено полное обоснованное решение.

В отсутствие верного решения используется максимальный подходящий критерий из приведённых ниже:

2 б. Неравенство

$$\frac{a^2+c^2-e^2}{4} > b+d-f$$

сведено к неравенству

$$(x_1-x_2)(x_1-x_3) > 0$$

или эквивалентному, но дальнейших продвижений нет.

0 б. Задача не решена или решена неверно.